ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————oOo———————

LƯƠNG THANH HUẾ

VỀ TÍNH CHẤT I-COFINITE CỦA MỘT SỐ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

LƯƠNG THANH HUẾ

VỀ TÍNH CHẤT I-COFINITE CỦA MỘT SỐ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. Nguyễn Văn Hoàng

THÁI NGUYÊN - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi xin cam đoan mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 23 tháng 04 năm 2019

Tác giả

Lương Thanh Huế

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành vào tháng 05/2018 dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG- Giảng viên Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy ở Viện Toán học và tất cả các thầy cô ở Đại học Thái Nguyên với những bài giảng đầy nhiệt thành và tâm huyết. Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học và các thầy cô trong Tổ đại số trường ĐH Sư phạm Thái Nguyên đã luôn quan tâm, tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập.

Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo, anh, chị, bạn bè đồng nghiệp tại Trung tâm GDNN-GDTX Lạng Giang nơi tôi làm việc đã tạo mọi điều kiện, động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học và làm luận văn.

Tôi xin được gửi cảm ơn tới tất cả thành viên trong gia đình đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, ngày 23 tháng 04 năm 2019

Tác giả

Lương Thanh Huế

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho R là vành giao hoán Noether, I là iđêan của R và M, N là hai R-môđun hữu hạn sinh. Một R-môđun K được gọi là môđun I-cofinite nếu $\operatorname{Supp}(K) \subseteq V(I)$ và $\operatorname{Ext}^j_R(R/I, K)$ là hữu hạn sinh với mọi $j \geq 0$. Bài toán nghiên cứu tính I-cofinite cho các môđun xuất hiện trong nhiều công trình nghiên cứu của các nhà khoa học trên thế giới như A. Grothendieck, R. Hartshorne (những năm 1967), L. Melkersson, K. Kawasaki, K. Bahmanpour, Nguyễn Tự Cường, Nguyễn Văn Hoàng, Lê Thanh Nhàn,... (những năm sau này). Việc nghiên cứu tính I-cofinite của một số môđun đặc biệt như môđun Artin, môđun đối đồng điều địa phương $H^j_I(N)$, môđun $\operatorname{Ext}^j_I(M, K)$ đã mang lại những thông tin quan trọng về cấu trúc vành và môđun.

Năm 1970, trong luận án tiến sĩ khoa học của mình, J. Herzog đã định nghĩa và nghiên cứu lớp môđun đối đồng điều địa phương suy rộng $H^j_I(M, N) \cong \varinjlim_n \operatorname{Ext}^j_R(M/I^n M, N)$. Lớp môđun này bao hàm lớp môđun đối đồng điều địa phương và lớp môđun mở rộng nhưng nó vẫn có những tính chất khác biệt. Do vậy, như một điều tự nhiên đã thúc đẩy ta tìm hiểu về tính I-cofinite cho lớp môđun này. Trong luận văn này, ta tập trung tìm hiểu câu hỏi: *Với những điều kiện nào thì môđun $H^j_I(M, N)$ là I-cofinite?*. Từ đó, ta thu được các tiêu chuẩn về tính I-cofinite của một lớp môđun đối đồng điều địa phương suy rộng và lớp môđun đối đồng điều địa phương (như những hệ quả).

Định lý 0.0.1. *(*[5, Định lý 1.1]*) Nếu I là iđêan chính thì $H^j_I(M, N)$ là I-cofinite với mọi R-môđun hữu hạn sinh M, N và mọi $j \geq 0$.*

Kết quả này là sự mở rộng của [14, Định lý 2.8] vì ta không cần giả thiết M có chiều hữu hạn. Hơn nữa, những lý luận của đối đồng điều địa phương được sử dụng trong chứng minh của K. I. Kawasaki [19, Định lý 1] là không thể áp dụng để chứng minh định lý này vì $H_I^j(M,N)$ là không triệt tiêu với mọi $j > 1$. Do vậy, ta cần dùng một tiêu chuẩn về tính cofinite đã được đưa ra bởi L. Melkersson trong [13]. Định lý sau đây là kết quả chính thứ hai của luận văn:

Định lý 0.0.2. *([5, Định lý 1.2]) Cho t là số nguyên không âm sao cho $\dim \operatorname{Supp}(H_I^j(M,N)) \leq 1$ với mọi $j < t$. Khi đó $H_I^j(M,N)$ là I-cofinite với mọi $j < t$ và $\operatorname{Hom}(R/I, H_I^t(M,N))$ là hữu hạn sinh.*

Trong [2, Định lý 2.6], K. Bahmanpour và R. Naghipour đã sử dụng tính chất cơ bản của đối đồng điều địa phương là $H_I^j(N) \cong H_I^j(N/\Gamma_I(N))$ với mọi $j > 0$. Từ đó chỉ ra $\Gamma_I(N) = 0$. Tuy nhiên điều này là không đúng khi $H_I^j(M,N) \cong H_I^j(M, N/\Gamma_{I_M}(N))$ với mọi $j > 0$, trong đó $I_M = \operatorname{ann}_R(M/IM)$. Do đó ta cần tới Bổ đề 2.2.3 chỉ ra rằng cho t, k là các số nguyên không âm, nếu $\dim \operatorname{Supp}(H_I^j(M,N)) \leq k$, với mọi $j < t$ thì $\dim \operatorname{Supp} H_I^j(M, N/\Gamma_{I_M}(N)) \leq k$. Hơn nữa, ta cũng cần tới các Bổ đề 2.2.2 và 2.2.4 về môđun minimax. Đặc biệt, Bổ đề 2.4.4 giúp ta thay vì nghiên cứu tính cofinite đối với iđêan I của $H_I^j(M,N)$ thì ta chỉ cần xét tính cofinite đối với iđêan I_M. Xét trường hợp số chiều nhỏ, trong [17, Bổ đề 3.1] đã chứng minh rằng nếu $\dim(N) \leq 2$ thì thương bất kì của $H_I^j(M,N)$ đều chỉ có hữu hạn các iđêan nguyên tố liên kết với mọi $j \geq 0$. Ta có một kết quả mạnh hơn sau đây

Định lý 0.0.3. *([5, Định lý 1.3]) Giả sử $\dim(M) \leq 2$ hoặc $\dim(N) \leq 2$. Khi đó $H_I^j(M,N)$ là I-cofinite với mọi j.*

Từ Định lý này, ta có một hệ quả trực tiếp về tính cofinite của một số môđun đối đồng điều địa phương (xem Bổ đề 2.5). Kết hợp Định lý 0.0.2

và 0.0.3, ta có được kết quả về tính hữu hạn của tập các iđêan nguyên tố liên kết của $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, H^j_I(M,N))$ với mọi $i, j \geq 0$ khi $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether và $\dim(N) \leq 3$ hoặc $\dim(M) \leq 3$.

Mục đích của luận văn này là trình bày chi tiết lại các chứng minh của các Định lý 0.0.1, 0.0.2 và 0.0.3 đã nêu ở trên. Các chứng minh này dựa trên bài báo chính là [5] của N. T. Cuong, S. Goto and N. V. Hoang năm 2015, *On the cofiniteness of generalized local cohomology modules*, Kyoto Journal of Mathematics **55**(1), 169–185.

Luận văn gồm hai chương. Chương 1 trình bày những kiến thức chuẩn bị về tập Ass, tập Supp, môđun Ext, đối đồng điều địa phương, đối đồng điều địa phương suy rộng, dãy chính quy, độ sâu, phức Koszul, đồng điều và đối đồng điều Koszul. Chương 2 trình bày kết quả chính của luận văn về chứng minh chi tiết cho các Định lý 0.0.1, 0.0.2 và 0.0.3. Sau mỗi định lý ta trình bày các hệ quả quan trọng thu được.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, ta luôn giả thiết R là vành giao hoán Noether, I là iđêan của R và M, N là các R-môđun.

1.1 Iđêan nguyên tố liên kết và giá của môđun

Định nghĩa 1.1.1. (Iđêan nguyên tố liên kết) Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại một phần tử $0 \neq x \in M$ sao cho $(0 : x)_R = \mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}$. Tập tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\mathrm{Ass}_R(M)$ hoặc $\mathrm{Ass}(M)$.

Định nghĩa 1.1.2. (Giá của môđun) Kí hiệu

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\},$$

ta gọi là *tập giá* của môđun M. Đặt $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Khi đó $\mathrm{Supp}(R/I) = V(I)$. Hơn nữa nếu M là R-môđun hữu hạn sinh thì $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$.

Sau đây là một số tính chất của tập các iđêan nguyên tố liên kết và giá của môđun.

Mệnh đề 1.1.3. *(i) Nếu $\mathfrak{p}$ là phần tử tối đại của tập*

$$\{\operatorname{Ann}(x) | 0 \neq x \in M\}$$

thì $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. Do đó $\operatorname{Ass}(M) \neq \emptyset$ khi và chỉ khi $M \neq 0$.

(ii) Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Khi đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ nếu và chỉ nếu M có một môđun con đẳng cấu với $R/\mathfrak{p}$.

(iii) Tập các ước của không của M, kí hiệu

$$\operatorname{Zdv}_R(M) = \{a \in R \mid \exists x \in M, x \neq 0, ax = 0\}$$

là hợp của tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M. Hay

$$\operatorname{Zdv}_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

Mệnh đề 1.1.4. *(i) Nếu M là R-môđun hữu hạn sinh thì $\operatorname{Ass}(M)$ là tập hữu hạn. Hơn nữa, $\operatorname{Ass}(M) \subseteq V(\operatorname{Ann}(M))$ và mỗi phần tử tối tiểu của $V(\operatorname{Ann}(M))$ đều thuộc $\operatorname{Ass}(M)$. Do đó $\sqrt{\operatorname{Ann}(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} \mathfrak{p}$.*

(ii) $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Supp}(M)$. Hơn nữa, mỗi phần tử tối tiểu của tập $\operatorname{Supp}(M)$ đều thuộc tập $\operatorname{Ass}(M)$.

(iii) $\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Mệnh đề 1.1.5. *Cho $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ là dãy khớp các R-môđun. Khi đó*

(i) $\operatorname{Ass}(M') \subset \operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(M') \cup \operatorname{Ass}(M'')$.

(ii) $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(M') \cup \operatorname{Supp}(M'')$.